Министерство образования и науки Республики Казахстан
РГП ПХВ «Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева»

Кафедра фундаментальная математика

ПРОГРАММА

вступительного экзамена в магистратуру по специальности
6M060100-Математика

Астана, 2017 г.

1. Полнота числовой прямой. Принцип вложенных отрезков.
2. Сходимость числовой последовательности. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.
3. Арифметические свойства пределов последовательностей. Предельные переходы для последовательностей в неравенствах.
4. Верхние и нижние пределы числовой последовательности. Критерий существования предела последовательности на языке верхних и нижних пределов. Теорема о существовании предела монотонной последовательности.
5. Предел функции в точке. Эквивалентность определений предела функции в точке на языке $\varepsilon-\delta$ и на языке последовательностей.
6. Непрерывность функции одной переменной в точке. Точки разрыва и их классификация.
7. Теоремы Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значениях непрерывной функции, заданной на отрезке. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.
8. Производная, дифференцируемость функции одной переменной. Линейность операции дифференцирования. Производная произведения и частного. Дифференциал функции.
9. Дифференцирование сложной функции.
10. Производные высших порядков функции одной переменной. Дифференциал второго порядка.
11. Исследование функции с помощью производных (монотонность, экстремумы, выпуклость и вогнутость, точки перегиба, асимптоты).
12. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши.
13. Формула Тейлора. Остаточные члены в различных формах (Лагранжа, Пеано, Коши). Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора.
14. Раскрытие неопределеностей в пределах. Правило Лопиталя.
15. Интегрируемость функции по Риману. Критерий интегрируемости. Классы интегрируемых функций.
16. Первообразная. Линейность первообразной. Интеграл с переменным с верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.
17. Методы интегрирования: Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям. Замена переменной.
18. Свойства интеграла Римана: линейность, аддитивность, монотонность. Теоремы о среднем значении.
19. Методы приближенного вычисления определенных интегралов: методы прямоугольников, трапеций, парабол.
20. Несобственные интегралы I и II рода. Условия сходимости.
21. Числовые ряды. Сходимость ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Необходимое условие сходимости. Признаки сходимости. Сходимость знакопеременного ряда.

22. Функциональные ряды. Сходимость в точке. Сходимость на промежутке. Критерий равномерной сходимости функциональных рядов.
23. Достаточные условия непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости суммы функционального ряда.
24. По членное интегрирование и по членное дифференцирование функционального ряда.
25. Степенные ряды; разложение функций в степенной ряд. Разложение в ряд элементарных функции.
26. Ряды Фурье по тригонометрической системе. Сходимость рядов Фурье в точке. Сходимость рядов Фурье в классах функции.
27. Линейней функционал на R^n. Дифференцирование функции многих переменных в точке как локальная линеаризация. Дифференциал.
28. Частные производные функции многих переменных. Условие независимости порядка взятия смешанных производных.
29. Достаточные условия дифференцируемости в точке функции многих переменных.
30. Дифференциалы первого и второго порядков функции многих переменных. Необходимое и достаточное условия существования экстремума функции многих переменных.
31. Определение n-мерного векторного пространства. Основные свойства и примеры. Теорема о необходимом и достаточном условии линейной зависимости системы векторов.
32. Взаимное расположение 2-х прямых в пространстве. Теорема о необходимых и достаточных условиях параллельности и перпендикулярности 2-х прямых.
33. Векторное, смешанное произведение векторов. Свойства и приложения. Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов.
34. Взаимное расположение плоскостей (в аналитическом изложении). Необходимые и достаточные условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
35. Углы между прямыми и плоскостями.
36. Различные виды задания уравнений прямой и плоскости. Отклонение от прямой и плоскости.
37. Линейной оператор в n-мерном векторном пространстве. Матрица линейного оператора. Связь между матрицами линейного оператора в различных базисах.
38. Преобразования координат на плоскости и в пространстве. Полярные, цилиндрические, сферические системы координат.
39. Понятие кривых на плоскости. Классификация кривых 2-го порядка.
40. Квадратичные формы. Закон инерции. Критерий Сильвестра.
41. Исследование поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям с помощью вращения, растяжений и сечений.

42. Канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы, их геометрические свойства.
43. Циклические группы. Изоморфизм циклических групп одного порядка.
44. Нормальные подгруппы. Фактор-группа. Теорема Лагранжа.
45. Определение группы. Простейшие свойства и примеры. Теорема о гомоморфизмах групп.
46. Теоремы о рациональных корнях многочлена с целочисленными коэффициентами.
47. Теорема о разложении многочлена от одной переменной на неприводимые над данным полем множители. Неприводимые над полем действительных чисел многочлены.
48. НОД и НОК многочленов. Алгоритм Евклида для многочленов.
49. Корни многочленов. Теорема Безу и схема Горнера.
50. Взаимно простые многочлены. Делимость.
51. Матрицы, действия над матрицами. Свойства операций над матрицами. Вычисление обратной матрицы.
52. Теорема о ранге матрицы. Теорема Кронекера - Капелли.
53. Присоединенная матрица. Критерий обратимости и формула обратной матрицы.
54. Определители n-го порядка. Элементарные свойства определителей.
55. Теорема о разложении определителя по строке или столбцу. Определитель произведения матриц. Определитель транспонированной матрицы.
56. Перестановки, инверсия, транспозиция, четность. Определение определителя, определители второго и третьего порядков.
57. Фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений. Формулы Крамера.
58. Характеристика поля. Простое поле. Числовое поле. Минимальные подполя.
59. Поле комплексных чисел. Модуль, аргумент, тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра. Извлечение корня из комплесного числа.
60. Аксиоматика и примеры колец и полей. Кольцо вычетов по модулю n. Поле Z_p.
61. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ). Общие свойства. Однородное ОДУ. Фундаментальная система решений. Вронскиан. Формула Лиувилля. Общее решение однородного ОДУ.
62. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.
63. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка от параметров и от начальных данных.
64. Теорема о дифференцируемости решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка по параметрам и по начальным данным.

65. Неоднородные линейные обыкновенные дифференциальные уравнения. Общее решение. Метод Лагранжа вариации постоянных.
66. Однородные линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной системы решений.
67. Однородная система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Фундаментальная система решений и фундаментальная матрица. Вронскиан. Формула Лиувилля. Структура общего решения однородной системы ОДУ.
68. Неоднородная система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с неоднородностью в виде матрицы с элементами квазимногочленов (нерезонансный и резонансный случаи).
69. Постановка краевых задач для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Функция Грина краевой задачи и ее явное представление. Интегральное представление решения краевой задачи. Теорема существования и единственности решения краевой задачи.
70. Автономные системы. Свойства решений. Особые точки линейной автономной системы двух уравнений. Устойчивость и асимптотическая устойчивость по Ляпунову. Устойчивость однородной системы линейных дифференциальных уравнений с переменной матрицей.
71. Устойчивость по первому приближению системы нелинейных дифференциальных уравнений. Второй метод Ляпунова.
72. Основные уравнения математической физики, постановка для них задачи Коши и краевых задач. Корректность постановки задачи. Пример Адамара.
73. Классификация уравнений с частными производными и приведение их к каноническому виду. Понятие характеристики.
74. Уравнение Лапласа. Фундаментальное решение. Теоремы единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
75. Функция Грина для уравнения Лапласа и ее свойства. Функция Грина для круга. Формула Пуассона. Некоторые следствия из формулы Пуассона (неравенство Гарнака, теоремы Лиувилля и Гарнака).
76. Решение задачи Коши для уравнения колебаний струны. Формула Даламбера.
77. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона.
78. Метрические пространства. Примеры. Задание топологии в метрическом пространстве. Сходимость последовательностей элементов метрического пространства.
79. Полные метрические пространства. Теорема об пополнение метрического пространства.
80. Компактные множества в метрическом пространстве. Теоремы о компактности множеств.

81. Отображения в метрических пространствах. Образы, праобразы множеств. Непрерывные отображения. Образы компактных множеств в метрических пространствах. Открытые отображения.
82. Принцип сжимающих отображений.
83. Плотные подмножества. Множества первой и второй категории. Теорема Бэра.
84. Нормированные пространства. Примеры. Полное нормированные пространство.
85. Непрерывные линейные функционалы в нормированных пространствах. Сопряженные пространства. Рефлексивные нормированые пространства.
86. Линейные операторы в нормированных пространствах. Ограничность. Теорема Банаха об ограничности линейного оператора.
87. Компактные линейные операторы в нормированных пространствах. Примеры.
88. Сопряженные линейные операторы. Обратные линейные операторы в нормированных пространствах.
89. Евклидовы пространства. Гильбертовые пространства. Представление непрерывных линейных функционалов в гильбертовом пространстве.
90. Существование ортогональных базисов, ортогонализация. Полнота базиса. Ряды Фурье по ортогональным базисам в гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Примеры.

Список литературы

1. Никольский С.М. Курс математического анализа: учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I: учебник для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1,2.М., Высшая школа. 2003
4. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Ч. 1 - М., Просвещение, 1986.
5. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. М., Наука, 1990.
6. Дадаян А. А., Дударенко В. А. Алгебра и геометрия. – Минск, Высшая школа, 1989.
7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М., Наука, 1988.
8. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М., ФИЗМАТЛИТ, 2002-317
9. Милованов М. В., Тышкевич Р. И., Феденко А. С. Алгебра и аналитическая геометрия. Ч. 1,2. – Минск, Высшая школа, 1984
10. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения – Москва: Просвещение, 1988 - 254
11. Филиппов А.Ф.Введение в теорию дифференциальных уравнений.- Москва: УРСС, 2004

12. Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математический физики – Москва: Наука, 1966 – 724 с.
13. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. М.: Наука, 1968
14. Треногин В.А. Функциональный анализ. Москва, 2007